

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРРОЗИОННОЙ МОДЕЛИ ГУТМАНА – ЗАЙНУЛИНА ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ СЖАТЫХ СТОЕК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Элементы многих инженерных конструкций в процессе эксплуатации подвергаются воздействию не только нагрузок и температур, но и различных коррозионных сред. Причем нередко перечисленные факторы действуют совместно в самых неблагоприятных сочетаниях, что значительно уменьшает несущую способность и сокращает срок службы конструкции. В общем случае (используя анализ большого количества экспериментальных результатов) коррозионный процесс в материале конструкции, находящейся в агрессивной среде, определяется температурой, напряженно - деформированным состоянием конструкции, характером агрессивной среды и временем пребывания конструкции в ней. В определенных условиях в число определяющих параметров могут также входить давление, скорость жидкости или агрессивного газа, характеристика геометрического положения элемента в конструкции и т.д. При этом различные исследователи предлагают нередко отличающиеся модели для описания одного и того же процесса. В этой связи, выбор одной из множества возможных математических моделей коррозионного процесса обуславливается конкретной ситуацией эксплуатации конструкции.

Влияние напряжений на скорость коррозии в расчетах конструкций впервые было учтено В.М.Долинским, исследовавшим прочность растягиваемой тонкостенной трубы, подвергающейся сплошной коррозии, скорость которой считалась линейной функцией интенсивности напряжений [1]. Экспоненциальная зависимость скорости коррозии от величины напряжений в конструкциях была предложена Э.М.Гутманом и Зайнулиным Р.С. [2].

Применение модели Долинского при оптимальном проектировании конструкций в условиях коррозии и поврежденности материала посвящены наши работы [3-8]. В частности, общие аспекты и численные результаты оптимизации начальной формы непризматических сжатых стоек прямоугольного и круглого сечений выполнены в работах [3,7]. Внедрение методики оптимального проектирования непризматических сжатых стоек круглого сечения, эксплуатируемых в условиях коррозии, применительно к оборудованию для вскрытия чугунной летки показано в [8].

Данная работа посвящена решению аналогичной задачи, с использованием коррозионной модели Гутмана - Зайнулина.

Рассмотрим задачу оптимального проектирования (по критерию минимума массы) стоек прямоугольного сечения, шарнирно опертых по концам, нагруженных осевой сжимающей силой F (рис.1) и подверженных коррозии.

В качестве уравнения коррозии принимаем модель Гутмана – Зайнулина

$$\frac{db}{dt} = -2\alpha \exp(\eta t) \exp(\gamma \sigma). \quad (1)$$

где $\sigma = F/bh$, b_0 и b - начальная и текущая высота прямоугольного сечения, $h = \text{const}$ [2].

Принимается, что коррозии подвержены верхняя и нижняя грани сечения, о чем и свидетельствует коэффициент 2.

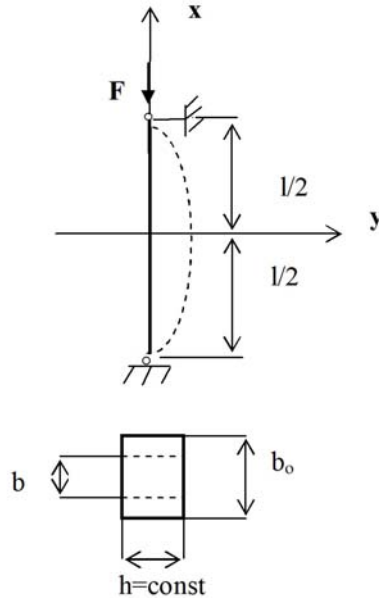


Рис.1-Расчетная схема прямоугольной стойки

Разделяя переменные в (1) и принимая $a = \gamma F / h$, получим

$$\int \exp(-a/b) db = -2\alpha \int \exp(\eta t) dt. \quad (2)$$

Или с учетом того, что $e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ имеем

$$\int \left(1 - a/b + \sum_2^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} b^{-n} \right) db = b - a \ln b + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{b^{1-n}}{1-n} = -\frac{2\alpha}{\eta} \exp(\eta t) + C.$$

При $t = 0$, $C = b_0 - a \ln b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{b_0^{1-n}}{1-n} + \frac{2\alpha}{\eta}$.

При $t = T$, (где T - заданное время эксплуатации конструкции, а b_T - высота сечения в этот момент времени)

$$\begin{aligned} & -\frac{2\alpha}{\eta} \exp(\eta T) + b_0 - a \ln b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{b_0^{1-n}}{1-n} + \frac{2\alpha}{\eta} = \\ & = b_T - a \ln b_T + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{b_T^{1-n}}{1-n}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\frac{\eta}{2\alpha} \left(b_0 - b_T - a \ln \frac{b_0}{b_T} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{(b_0^{1-n} - b_T^{1-n})}{1-n} \right) = \exp(\eta T) - 1. \quad (3)$$

Так как минимум веса стойки обеспечивается оптимальным распределением начальной высоты прямоугольного сечения b_0 по ее длине (исходя из условия:

$$V = 2 \int_0^{1/2} A dx = 2h \int_0^{1/2} b_0(x) h dx,$$

Эйлера-Лагранжа:

$$\delta_y f = f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0 \quad (4)$$

$$\delta_{b_0} f = \frac{df}{db_0} = 0, \quad (5)$$

где f - так называемая функция Лагранжа (с дополнительным условием в виде уравнения (3) выглядит следующим образом:

$$f = b_0 h + \lambda(x) \left\{ -\frac{\eta}{2\alpha} \left(b_0 - b_T - a \ln \frac{b_0}{b_T} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n (b_0^{1-n} - b_T^{1-n})}{n! (1-n)} \right) + \exp(\eta T) - 1 \right\}. \quad (6)$$

Напишем уравнение продольного изгиба

$$EIy'' + Fy = 0.$$

Принимая, что потеря устойчивости произойдет в момент времени $t > T$ в направлении h (т.е. $I = \frac{bh^3}{12}$), величину b_T определяем как $b_T = -\frac{12Fy}{h^3Ey''}$. В этом случае уравнение (6) принимает следующий вид:

$$f = b_0 h + \lambda(x) \left\{ -\frac{\eta}{2\alpha} \left[b_0 + \frac{12Fy}{h^3Ey''} - a \ln b_0 + a \ln \left(\frac{-12Fy}{h^3Ey''} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n \left(b_0^{1-n} - \left(\frac{-12Fy}{h^3Ey''} \right)^{1-n} \right)}{n! (1-n)} \right] + \exp(\eta T) - 1 \right\}.$$

Тогда

$$f_y = \lambda(x) \left\{ -\frac{\eta}{2\alpha} \left[\frac{12F}{h^3Ey''} + a/y - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(-\frac{12F}{h^3Ey''} \right)^{1-n} y^{-n} \right] \right\};$$

$$f_{y'} = 0;$$

$$f_{y''} = \lambda(x) \left\{ -\frac{\eta}{2\alpha} \left[-\frac{12Fy}{h^3Ey''^2} - a/y'' + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(-\frac{12Fy}{h^3Ey''} \right) y^{n-2} \right] \right\}.$$

Подставив полученные выражения в уравнение (4), имеем

$$\begin{aligned} \delta_y f = \lambda(x) & \left\{ \left[\frac{12F}{h^3Ey''} + a/y - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(-\frac{12F}{h^3E} \right)^{1-n} \left(\frac{y''}{y} \right)^n \frac{1}{y''} \right] - \right. \\ & \left. - \left(\lambda(x) \left[\frac{y}{y''} \left[\frac{12F}{h^3Ey''} + a/y - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(-\frac{12F}{h^3E} \right)^{1-n} \left(\frac{y''}{y} \right) \frac{1}{y''} \right] \right] \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения уравнения (7) применяется метод И.Г. Ченцова [9].

Введем обозначение

$$k = \frac{\lambda y}{y''} \left[\frac{12F}{h^3Ey''} + \frac{a}{y} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(\frac{12F}{h^3E} \right)^{1-n} \left(\frac{y''}{y} \right)^n \frac{1}{y''} \right]. \quad (8)$$

Тогда умножая уравнение (7) на y , можно представить его в виде

$$ky'' - yk'' = 0.$$

Нетрудно проверить непосредственным дифференцированием, что интеграл этого уравнения будет:

$$ky' - yk' = C, \quad (9)$$

где C - произвольная постоянная. Для дальнейшего интегрирования целесообразно учесть, что для принятых граничных условий $C=0$. Действительно, предполагая форму потери устойчивости стержня симметричной относительно начала координат, задаваемого в середине стержня, установим, что y , y'' , y'/y'' и k являются четными функциями x . Производные же от y и k будут нечетными функциями и обращаются при $x=0$ в ноль.

Поэтому, положив в (9) $x=0$, получим $C=0$. Таким образом, получается уравнение

$$ky' - yk' = 0.$$

Его интеграл берется без труда при помощи разделения переменных

$$k = C_1 y.$$

где C_1 - новая произвольная постоянная. Возвращаясь к обозначению (8), находим:

$$\frac{\lambda y}{y''} \left[\frac{12F}{h^3 E y''} + \frac{a}{y} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(\frac{12F}{h^3 E} \right)^{1-n} \left(\frac{y''}{y} \right)^n \frac{1}{y''} \right] = C_1 y. \quad (10)$$

В свою очередь

$$\delta_{b_0} f = h + \lambda \left[-\frac{\eta}{2\alpha} \left(1 - \frac{a}{b_0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} b_0^{-n} \right) \right] = 0. \quad (11)$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{2\alpha h}{\eta \left(1 - \frac{a}{b_0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} b_0^{-n} \right)}.$$

Подставив λ в (10), окончательно получим

$$\frac{2\alpha}{\eta} \left[\frac{12F}{h^2 E} + \frac{\gamma F y''}{y} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \left(\frac{12F}{h^3 E} \right)^{1-n} \left(\frac{y''}{y} \right)^n h \right] = \left(1 - a/b_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} b_0^{-n} \right) y''^2. \quad (12)$$

В начале рассмотрим частный случай **а**), когда при разложении экспоненты в (2) сохраняются первые два члена (в этом случае мы получаем модель коррозии аналогичную модели Долинского).

Тогда уравнения (3) и (12) становятся следующими:

$$\frac{\eta}{2\alpha} \left(b_0 - b_T - \frac{\gamma F}{h} \ln \frac{b_0}{b_T} \right) = \exp(\eta T) - 1. \quad (13)$$

$$\frac{2\alpha}{\eta} \left[\frac{12F}{h^2 E} + \frac{\gamma F y''}{y} \right] = \left(1 - \frac{\gamma F}{h b_0} \right) y''^2. \quad (14)$$

Перейдем к безразмерным величинам, обозначив:

$$A = \exp(\eta T) - 1, \quad B = \frac{\gamma F}{h} \frac{\eta}{2\alpha}, \quad \chi_o = \frac{b_o \eta}{2\alpha}, \quad \chi_T = \frac{\eta}{2\alpha} b_T = \frac{\eta}{2\alpha} \left(-\frac{12Fy}{h^3 E y''} \right) = \frac{-6\eta F l^2 V}{\alpha h^3 E 4 V''} = CV/V''$$

(с учетом того, что $\frac{y}{y''} = \frac{l^2}{4} \frac{V}{V''}$).

где

$$C = -\frac{1.5\eta Fl^2}{\alpha h^3 E}, \quad V = \sqrt{\frac{\eta E}{6\alpha F}} * \frac{2h}{l^2} y, \quad V''_{\xi\xi} = \sqrt{\frac{\eta E}{6\alpha F}} * \frac{h}{2} y'', \quad \text{и } \xi = \frac{2x}{l}.$$

В этом случае уравнения (13) и (14) превращаются в следующие:

$$\chi_0 - \chi_T - B \ln \frac{\chi_0}{\chi_T} = A \quad (15)$$

$$1 - \frac{B}{\chi_T} = \left(1 - \frac{B}{\chi_0}\right) V''^2. \quad (16)$$

Из уравнения (16) находим

$$\chi_0 = \frac{BV''^2}{V''^2 + B/\chi_T - 1}. \quad (17)$$

Подставив его в (15) с учетом того, что $\chi_T = CV/V''$, окончательно получим

$$A = \frac{BV''^2}{V''^2 + BV''^2/CV - 1} - \frac{CV}{V''} - B \ln \frac{BV''^2}{V''^2 + BV''^2/CV - 1} \frac{CV/V''}{CV/V''}. \quad (18)$$

Учитывая симметричное выпучивание стойки относительно оси y , разобьем ее половинную длину на участки $\Delta \xi$, как это показано на рис.2.

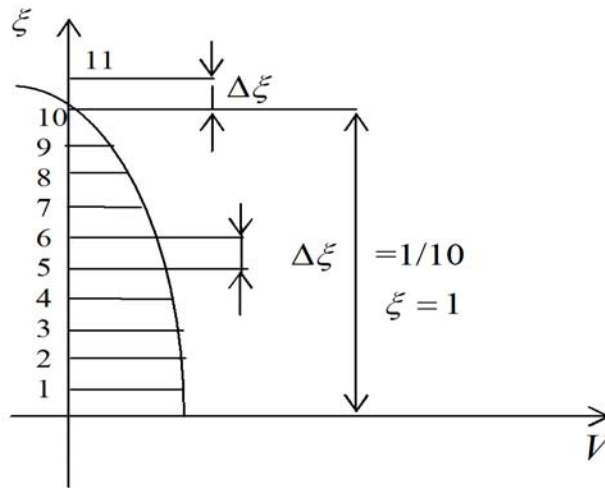


Рис..2-Схема разбивки выпучивания стойки

В этом случае для определения очертания изгиба стойки (помимо уравнения (18)) используется известная зависимость между прогибом и его второй производной:

$$V_{i-1} = \Delta \xi^2 V''_i + 2V_i - V_{i+1} \quad (19)$$

Задаваясь произвольным отрицательным значением V_{11} и учитывая, что $V_{10} = V''_{10} = 0$ (т.е. $V_9 = -V_{11}$), из уравнения (18) с применением алгоритма метода случайного поиска находим V_9 . Затем по формуле (19) находим V_8 и т.д. Процедура повторяется до тех пор, пока не найдены V_0 и V''_0 .

Проверкой правильности решения служит равенство $V'_o=0$ (т.е. когда $V_1 \approx V_o$), в силу симметрии выпучивания, что достигается варьированием начального значения V_{11} .

После того, как в каждом пункте найдены значения V_i и V_i'' по выше приведенным формулам, легко находятся величины χ_{Ti} и χ_{oi} .

Рассмотрим теперь частный случай б) решения полученных уравнений (3) и (12) при $n=2$. В этом случае уравнения (3) и (12) трансформируются в следующие:

$$\frac{\eta}{2\alpha} \left(b_0 - b_T - \frac{\gamma F}{h} \ln \frac{b_0}{b_T} + \frac{\gamma^2 F^2}{2h^2} \left(\frac{1}{b_T} - \frac{1}{b_0} \right) \right) = \exp(\eta T) - 1. \quad (20)$$

$$\frac{2\alpha}{\eta} \left[\frac{12F}{h^2 E} + \frac{\gamma F y''}{y} + \frac{\gamma^2 F^2}{2h} \left(\frac{h^3 E}{12F} \right) \left(\frac{y''}{y} \right)^2 \right] = \left(1 - \gamma F / hb_0 + \frac{\gamma^2 F^2}{2h^2 b_0^2} \right) y''^2. \quad (21)$$

Или в безразмерных величинах:

$$\chi_0 - \chi_T - B \ln \frac{\chi_0}{\chi_T} + \frac{B^2}{2} (1/\chi_T - 1/\chi_0) = A \quad (22)$$

$$1 - \frac{B}{\chi_T} + \frac{B^2}{2\chi_T^2} = \left(1 - \frac{B}{\chi_0} + \frac{B^2}{2\chi_0^2} \right) V''^2. \quad (23)$$

Из уравнения (23) находим

$$\chi_0 = -\frac{B}{2(K-1)} (1 - \sqrt{2K-1}), \quad (24)$$

$$\text{где } K = \frac{1}{V''^2} \left(1 - \frac{B}{\chi_T} + \frac{B^2}{2\chi_T^2} \right).$$

Подставляя это выражение в (22), с учетом того, что $\chi_T = C \frac{V}{V''}$, имеем:

$$f_1(B, C, V, V'') = A, \quad (25)$$

где $f_1(B, C, V, V'')$ - функция, зависящая от B, C, V, V'' .

В конце рассмотрим частный случай с) решения полученных уравнений (3) и (12) при $n=3$.

В этом случае уравнения (3) и (12) превращаются в следующие

$$\frac{\eta}{2\alpha} \left(b_0 - b_T - \frac{\gamma F}{h} \ln \frac{b_0}{b_T} + \frac{\gamma^2 F^2}{2h^2} \left(\frac{1}{b_T} - \frac{1}{b_0} \right) + \frac{\gamma^3 F^3}{12h^3} \left(\frac{1}{b_0^2} - \frac{1}{b_T^2} \right) \right) = \exp(\eta T) - 1. \quad (26)$$

$$\frac{2\alpha}{\eta} \left[\frac{12F}{h^2 E} + \frac{\gamma F y''}{y} + \frac{\gamma^2 F^2}{2h} \left(\frac{h^3 E}{12F} \right) \left(\frac{y''}{y} \right)^2 - \frac{\gamma^3 F^3}{6h^3} \left(\frac{h^3 E}{12F} \right)^2 \left(\frac{y''}{y} \right)^3 \right] = \left(1 - \gamma F / hb_0 + \frac{\gamma^2 F^2}{2h^2 b_0^2} - \frac{\gamma^3 F^3}{6h^3 b_0^3} \right) y''^2. \quad (27)$$

Или в безразмерном виде

$$\chi_0 - \chi_T - B \ln \frac{\chi_0}{\chi_T} + \frac{B^2}{2} \left(\frac{1}{\chi_T} - \frac{1}{\chi_0} \right) + \frac{B^3}{12} \left(\frac{1}{\chi_0^2} - \frac{1}{\chi_T^2} \right) = A. \quad (28)$$

$$1 - \frac{B}{\chi_T} + \frac{B^2}{2\chi_T^2} + \frac{B^3}{6\chi_T^3} = \left(1 - \frac{B}{\chi_0} + \frac{B^2}{2\chi_0^2} - \frac{B^3}{6\chi_0^3}\right) V^{n^2}. \quad (29)$$

Из (29) находим χ_0 . После несложных преобразований, получаем следующее уравнение 3-й степени:

$$\chi_0^3 + r_1\chi_0^2 + r_2\chi_0 + r_3 = 0,$$

где

$$r_1 = \frac{B}{K_1 - 1}, \quad r_2 = \frac{B^2}{1 - K_1}, \quad r_3 = \frac{B}{6(K_1 - 1)}, \quad K_1 = \frac{1 - B/\chi_T + B^2/2\chi_T^2 + B^3/6\chi_T^3}{V^{n^2}}.$$

Его решение находим, применяя формулу Кардано к его приведенному виду:

$$z^3 + pz + q = 0,$$

где

$$z = \chi_0 + r_1/3, \quad p = \frac{3r_2 - r_1^2}{3}, \quad q = \frac{2r_1^3}{27} - \frac{r_1r_2}{3} + r_3.$$

Если $D_s = (p/3)^3 + (q/2)^2 > 0$, то $z = u + v$, где $u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{D_s}}$, $v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{D_s}}$.

Если $D_s < 0$, то $z = 2\sqrt[3]{r} \cos(\varphi/3)$, где $r = \sqrt{-p^3/27}$, $\cos \varphi = -q/2r$.

Определив χ_0 и подставив его в (28), с учетом того, что $\chi_T = C \frac{V}{V''}$, имеем (аналогично случаю, когда $n=2$):

$$f_2(B, C, V, V'') = A, \quad (30)$$

где $f_2(B, C, V, V'')$ - функция зависящая от B, C, V, V'' .

Оптимальные очертания начального вида приведенной высоты прямоугольного сечения стойки $\chi_0(\xi)$ и ее вид в момент времени $t \approx T$: $\chi_T(\xi)$ были получены для сплава Д16Т, имеющего следующие коэффициенты коррозионной модели (1): $\alpha = 0.048$ см/год; $\gamma = 0.588$ см²/т; $\eta = 0.091$ год⁻¹; $E = 700$ т/см². Также принимались $h = 1$ см; $F = 1$ т; $T = 10$ лет; $l = 100$ см. В этом случае безразмерные величины принимают значения $A = 1.484$; $B = 0.557$; $C = -40.625$. Для всех 3-х случаев они практически совпадают (рис.3).

Аналогичные результаты были получены при $F = 1.79$ т; $T = 7.62$ лет; $l = 100$ см. В этом случае безразмерные величины принимают значения $A = 1$; $B = 1$; $C = -73$. Оптимальные очертания начального вида приведенной высоты прямоугольного сечения стойки $\chi_0(\xi)$ и ее вид в момент времени $t \approx T$: $\chi_T(\xi)$ показаны на рис.4. Здесь также для всех 3-х случаев они практически совпадают.

Последние численные результаты были получены для следующих параметров: $F = 1.79$ т; $T = 7.62$ лет; $l = 100$ см; $A = 1$; $C = -73$; $B = 5$. Новое значение параметра B (при неизменных выше перечисленных параметрах) соответствует резкому увеличению зависимости скорости коррозии от величины напряжения, т.е. параметр $\gamma = 0.588 \times 5 = 2.94$ см²/т.

Оптимальные очертания начального вида приведенной высоты прямоугольного сечения стойки $\chi_0(\xi)$ и ее вид в момент времени $t \approx T$: $\chi_T(\xi)$, полученные для этого случая показаны на рис.5.

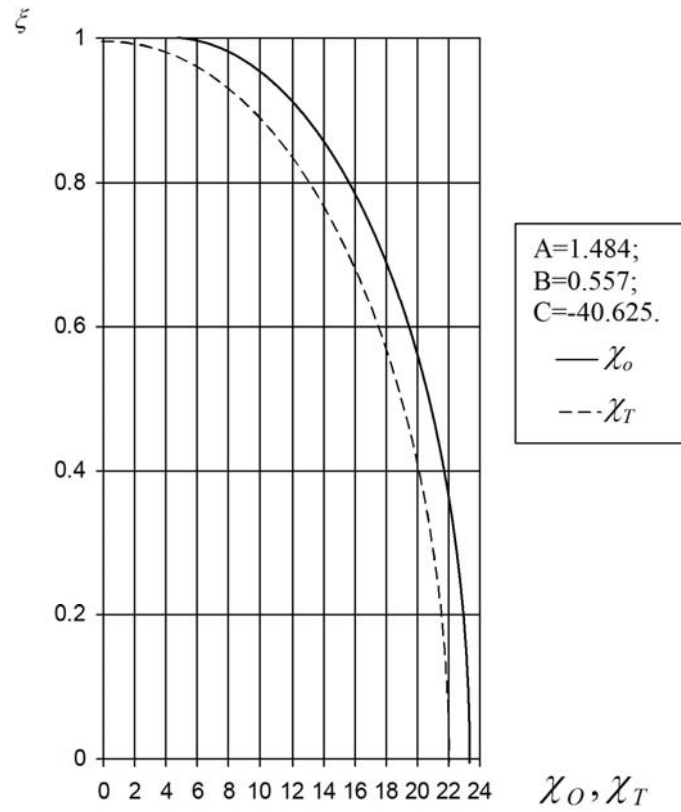


Рис. 3-Оптимальное очертание стойки и ее вид в конечный момент времени при $B=0.557$

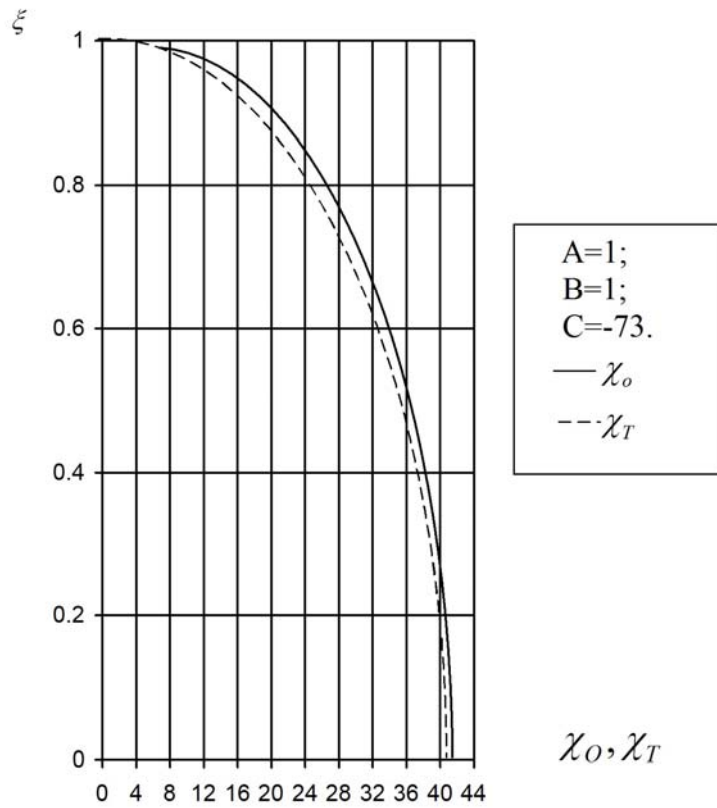


Рис. 4-Оптимальное очертание стойки и ее вид в конечный момент времени при $B=1$

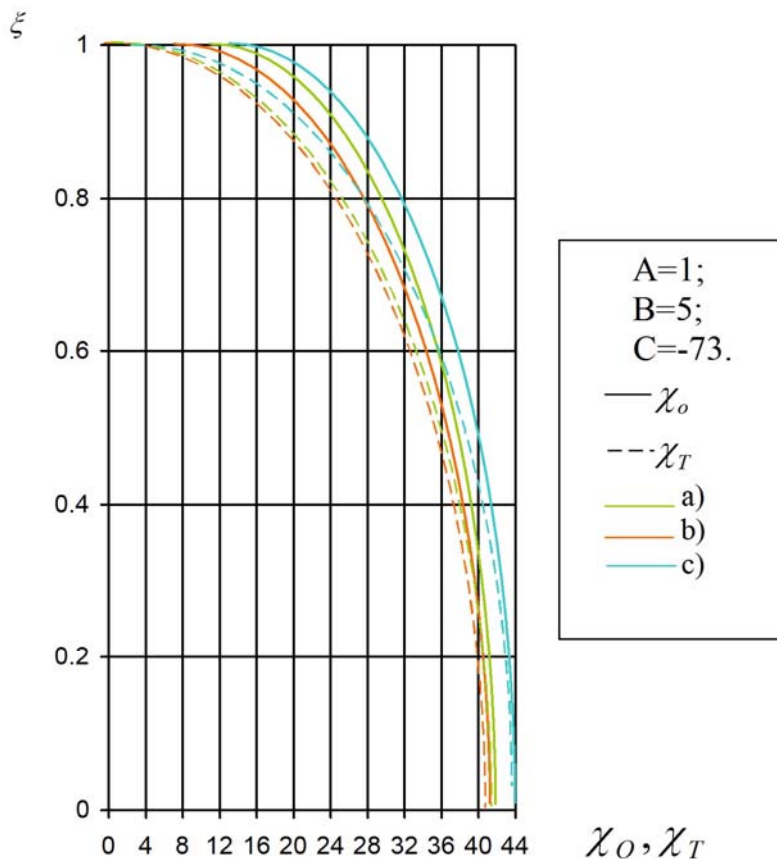


Рис. 5-Оптимальное очертание стойки и ее вид в конечный момент времени при $B=5$

ВЫВОДЫ:

Получены общие и частные решения уравнения коррозии Гутмана, а также выполнена с применением вариационного исчисления, оптимизация непризматических стоек, подверженных осевой сжимающей силе и функционирующих в условиях коррозии.

Результаты численного эксперимента, приведенные на рис.3 и рис.4 свидетельствуют о том, что увеличение числа членов в разложении экспоненты в формуле (2) не дает видимого эффекта, так как во всех 3-х случаях оптимальные очертания начального вида приведенной высоты прямоугольного сечения стойки $\chi_0(\xi)$ и ее вид в момент времени $t \approx T$: $\chi_T(\xi)$ практически совпадают. Это совпадение имеет следующее объяснение. Так, подставив полученные значения χ_0, χ_T в уравнение (28), можно увидеть, что члены при B^2 и тем более при B^3 стремятся к нулю. Увеличивая значение коэффициента B (при постоянных значениях $\alpha = 0.048$ см/год; $\gamma = 0.588$ см²/г; $\eta = 0.091$ год⁻¹; $E=700$ г/см²) следует увеличивать и силу F , а это в свою очередь приводит к резкому увеличению χ_0, χ_T . А так как они стоят в знаменателях в (28), то соответственно опять уменьшаются члены при B^2 и B^3 и т.д. Небольшое отличие (от 1.5÷10%) во всех 3-х случаях имеет место при большой зависимости скорости коррозии от величины напряжения (при $B=5$), что наглядно отображено на рис.5.

Резюмируя выше сказанное, можно сделать вывод, что использование коррозионной модели Долинского (в нашем рассмотрении случай а) позволяет получить достаточно точное решение задачи оптимизации непризматических стоек, подверженных осевой сжимающей силе в условиях коррозии.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Долинский В.М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии// Хим. и нефт. Машиностроение. – 1967. - №2. – С.21-30.

2. Гутман Э.М., Зайнулин Р.С. Кинетика механохимического разрушения и долговечность растянутых конструктивных элементов при упругопластических деформациях// ФХММ. – 1984. - №2. – С.14-17.
3. Почтман Ю.М., Фридман М.М. Методы расчета надежности и оптимального проектирования конструкций, функционирующих в экстремальных условиях. – Днепропетровск, Изд. «Наука и образование», 1997. -134 с.
4. Pochtman Yu.M., Fridman M.M. Optimal design of pressure vessels including the effects of environment//Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences.-Warszawa.-1995. .-N1- vol.2.- P.19-23.
5. Pochtman Yu.M., Fridman M.M. Optimization of cylindrical shells subjected to pitting corrosion// Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences.- 1996.- N3.- vol.4.-P.1-5.
6. Фридман М.М. Концептуальні підходи при оптимальному проектуванні конструкцій, що функціонують в екстремальних умовах// Наук.-техн. зб. “Опір матеріалів і теорія споруд”. - Київ.- КНУБА. -2002. Вип. 70. - С.158-175.
7. Fridman M.M., Zyczkowski M. Structural optimization of elastic columns under stress corrosionconditions//Structural Optimization. - 2001. - vol. 21(3). P.218-228.
8. Фридман М.М. Оптимизация непрямоугольных сжатых стоек круглого сечения, эксплуатируемых в условиях коррозии, в случае проектирования оборудования ударного типа//Сборник научных трудов «Новое в технологии, технике и переработке минерального сырья». – Кривой Рог. – ОАО НИПИ «Механобрчермет». – 2011. – С.176- 183.
9. Ченцов Н.Г. Стойки наименьшего веса, Труды ЦАГИ, вып. 265, - 1936, С.20-26.